FONCTION CONTINUE contre FONCTION DÉRIVÉE

Dominique Hoareau, domeh@wanadoo.fr

Objectifs :

Faire "vibrer" des énoncés classiques (Théorème des valeurs intermédiaires...) jusqu´à obtenir des résultats moins connus.

Première partie

Le coup du triangle

A - Position du problème

a) Quand on veut caractériser les homéomorphismes entre deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ comme bijections strictement monotones de I sur J, on rencontre :

Proposition 1
(i) une fonction réelle f définie sur un intervalle I est continue et injective sur I si et seulement si (ii) f est strictement monotone sur I et $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Une preuve élégante de (i)⇒(ii) (cf [1] ou [2])

L´image $f(I)$ de l´intervalle I par l´application continue f est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit à présent le triangle $T = \{(x, y) \in I^2 \ ; \ x < y\}$. T est convexe, donc connexe dans $\mathbb{R}^2$. On envisage l´application δ_f définie de T dans $\mathbb{R}$ par

$$\delta_f(x, y) = f(y) - f(x) = det \begin{pmatrix} 1 & \text{f(x)} \\ 1 & \text{f(y)} \end{pmatrix}$$

δ_f est continue sur T car f est continue sur I, donc $\delta_f(T)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$, ie un intervalle de $\mathbb{R}$. Avec f injective, $\delta_f(T)$ ne peut contenir 0, d´où $\delta_f(T) \subset \mathbb{R}^*+$ (f strictement croissante sur I) ou bien $\delta_f(T) \subset \mathbb{R}^*-$ (f strictement décroissante sur I).

Application (Théorème de Darboux)
Soit F une fonction réelle définie et dérivable sur l´intervalle I.
On pose $f = F'$. Soit $a < b$ dans I tel que $f(a) < f(b)$, $\mu \in]f(a), f(b)[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\mu = f(c)$.

On considère l´application $G : x \mapsto F(x) - \mu x$, dérivable sur I de dérivée $g = f - \mu$ et on veut montrer que g s´annule sur $[a, b]$. Pour cela, on raisonne par l´absurde.
• G est injective sur $[a, b]$. Sinon, il existe α et β dans $[a, b]$ tels que $\alpha < \beta$ et $G(\alpha) = G(\beta)$. Par application licite de Rolle, il existe $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que $g(\gamma) = 0$. Contradiction.
• G continue et injective sur l´intervalle $[a, b]$ y est strictement monotone, donc $g = G'$ garde un signe constant sur $[a, b]$, ce qui n´est pas puisque $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$.

b) Théorème de Darboux

Le "coup du triangle" donne une preuve directe du théorème de Darboux dont on rappelle l´énoncé : pour $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur l´intervalle I, la fonction dérivée $F' = f$ a la propriété des valeurs intermédiaires (cf [1]). Ceci montre au passage que "la propriété des valeurs intermédiaires n´est pas l´apanage des fonctions continues".

Preuve : $\tau_F : (x, y) \mapsto \frac{F(y)-F(x)}{y-x}$ est continue sur T donc $\tau_F(T)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour chaque (x, y) dans T, il existe d´après le théorème des accroissements finis c dans $]x, y[$ tel que : $\tau_F(x, y) = f(c)$. De là : $\tau_F(T) \subset f(I)$. Pour $x \in I$, la suite $(x, x+\frac{1}{n})$ (ou $(x, x-\frac{1}{n})$), quitte à supprimer les premiers termes, est une suite de points de T et par définition d´une dérivée, on a : $f(x) = \lim_{n\to+\infty}\tau_F(x, x+\frac{1}{n})$ (ou $f(x) = \lim_{n\to+\infty}\tau_F(x, x-\frac{1}{n})$). D´où : $f(I) \subset \overline{\tau_F(T)}$. En définitive, $f(I)$ vérifie : $\tau_F(T) \subset f(I) \subset \overline{\tau_F(T)}$ avec $\tau_F(T)$ connexe de $\mathbb{R}$ donc $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Remarque : Si f n´est pas continue en un certain $x_0 \in I$, f n´a pas de limites finies en x_0- et x_0+. En effet, si on suppose par exemple l´existence de $f(x_0-)$ avec $f(x_0-) < f(x_0)$, on choisit $\delta > 0$ tel que

$$f\left([x_0 - \delta, x_0[\right) \subset [f(x_0-), \frac{f(x_0-) + f(x_0)}{2}].$$

Avec $\frac{f(x_0)+f(x_0-)}{2} < \frac{3f(x_0)+f(x_0-)}{4} < f(x_0)$, on a : $\frac{3f(x_0)+f(x_0-)}{4} \notin f\left([x_0 - \delta, x_0]\right)$. Contradiction avec le théorème de Darboux.

Voici deux applications du théorème de Darboux :

Exercice 1 : [ ] désigne la partie entière. Trouver les fonctions réelles F définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $F' = [F]$.

Si F convient, $F' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui a la propriété des valeurs intermédiaires et qui est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, est constante. Il existe donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $F(x) = Ax + B$ sur $\mathbb{R}$. On a $A = 0$ (Sinon $[F](0) = [B]$ diffère de $[F](\frac{1}{A}) = [B] + 1$ et F' n´est pas constante sur $\mathbb{R}$). Il reste $F = B$, donc $F' = 0$, d´où $[F] = [B] = 0$, ce qui impose $B \in [0, 1[$. La réciproque est claire.

Exercice 2 : Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, sans zéros et vérifiant $\mid F'' \mid = F$. Déterminer F.

F'' ne s´annule pas sur $\mathbb{R}$ donc d´après le théorème de Darboux, $F'' = (F')'$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$. On a $F'' > 0$ (sinon $F'' < 0$ et $F'' + F = 0$, ce qui donne une solution oscillante F qui s´annule). F vérifie donc $F'' - F = 0$, $F(x) = A\cosh x + B\sinh x = \frac{\exp x}{2}[A + B] + \frac{\exp(-x)}{2}[A - B]$. F est par ailleurs à valeurs strictement positives donc $A = F(0) > 0$, $A + B \geqslant 0$ (sinon $\lim_{+\infty}F(x) = -\infty$), et $A - B \geqslant 0$ (sinon $\lim_{-\infty}F(x) = -\infty$).
Bilan : $F(x) = A\cosh x + B\sinh x$ avec $A > 0$ et $\mid B \mid \leqslant A$.

c) Question
$(i) \Rightarrow (ii)$ repose essentiellement sur le théorème des valeurs intermédiaires. Avec le théorème de Darboux en poche, on peut se poser la question : l´implication $(i) \Rightarrow (ii)$ reste-t-elle vraie si on remplace l´hypothèse "f continue" par "f une fonction dérivée" ?

Proposition 2 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $F : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On suppose que F' notée f est injective sur I. Alors f est strictement monotone sur I.*

Le théorème de Darboux et $(ii) \Rightarrow (i)$ donnent alors à posteriori f continue (et F de classe C^1) sur I. Il est donc naturel pour fabriquer des fonctions dérivées non continues de considérer des fonctions "fortement" non injectives.

B - Une preuve qui contourne Darboux

Il suffit de montrer que F est strictement convexe ou strictement concave. On met en place une manipulation du type "coup du triangle" et on donne une preuve qui repose (comme le théorème de Darboux) sur le théorème des accroissements finis et les valeurs intermédiaires pour fonctions continues.

Si pour $a \in I$, la fonction p_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par $p_a(x) = \frac{F(x)-F(a)}{x-a}$ désigne la fonction pente de F en a, on vérifie que :
F est strictement convexe sur I
$\Leftrightarrow [\forall (x,y,z) \in I^3 \quad x < y < z \Rightarrow p_x(y) < p_x(z)]$
$\Leftrightarrow [\forall (x,y,z) \in I^3 \quad x < y < z \Rightarrow det \begin{pmatrix} 1 & \text{x} & \text{F(x)} \\ 1 & \text{y} & \text{F(y)} \\ 1 & \text{z} & \text{F(z)} \end{pmatrix} > 0]$
De même, F strictement concave sur I
$\Leftrightarrow [\forall (x,y,z) \in I^3 \quad x < y < z \Rightarrow det \begin{pmatrix} 1 & \text{x} & \text{F(x)} \\ 1 & \text{y} & \text{F(y)} \\ 1 & \text{z} & \text{F(z)} \end{pmatrix} < 0]$.

On pose : $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in I^3 ; x < y < z\}$ et pour (x,y,z) dans $\mathcal{P}$, $\Delta_F(x,y,z) = det \begin{pmatrix} 1 & \text{x} & \text{F(x)} \\ 1 & \text{y} & \text{F(y)} \\ 1 & \text{z} & \text{F(z)} \end{pmatrix}$

On raisonne par l´absurde : on suppose que F n´est ni strictement convexe, ni strictement concave sur I. Il existe alors (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) dans $\mathcal{P}$ tels que : $\Delta_F(x_1,y_1,z_1) \leqslant 0$ et $\Delta_F(x_2,y_2,z_2) \geqslant 0$. $\mathcal{P}$ étant convexe donc connexe de $\mathbb{R}^3$ et Δ_F étant continue sur $\mathcal{P}$, par valeurs intermédiaires, Δ_F s´annule sur $\mathcal{P}$ en un certain (a,b,c). Nécessairement, (a,b,c) et $(F(a),F(b),F(c))$ sont liés, et le coefficient de colinéarité λ est donné par : $\lambda = \frac{F(c)-F(a)}{c-a} = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{F(c)-F(b)}{c-b}$. Par le théorème des accroissements finis, λ peut s´écrire : $\lambda = f(\eta)$ avec $\eta \in]a,b[$ et $\lambda = f(\xi)$ avec $\xi \in]b,c[$. Contradiction puisque f est injective.

Remarque : (cf J.-B. Hiriart-Urruty,RMS-9-1984)
On peut montrer :

Proposition 3
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction injective vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires. Alors* f *est strictement monotone sur* $[a,b]$.

Il suffit de vérifier qu´une telle fonction f est continue, puis d´appliquer $(i) \Rightarrow (ii)$. C´est immédiat avec :

Théorème de Rowe : Si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est telle que :

1. f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires
2. pour tout réel r, la fibre $f^{-1}(\{r\})$ est fermée,

alors f est continue.

Preuve : Pour $x_0 \in [a,b]$ et $\varepsilon > 0$, x_0 n´est pas dans le fermé

$$f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon) \cup f^{-1}(f(x_0) + \varepsilon)$$

donc on choisit $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad f(x) \neq f(x_0) - \varepsilon \quad ; \quad f(x) \neq f(x_0) + \varepsilon.$$

L´intervalle $f(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[)$ est alors nécessairement inclus dans
$]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$, d´où la continuité de f en x_0.

Dans le même article RMS, on justifie l´implication $(ii) \Rightarrow (i)$ avec le théorème de Rowe.

Deuxième partie

Accroissements finis

a) Énoncé du théorème de Rolle

Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $F(a) = F(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que : $F'(c) = 0$.

La preuve est basée, d´une part sur le fait qu´une fonction *continue sur un segment* est bornée et atteint ses bornes inférieure et supérieure (l´une de ses bornes étant atteinte en un point de $]a,b[$ puisque $F(a) = F(b)$), d´autre part sur le fait que la *dérivée* s´annule en tout extremum local atteint à l´*intérieur* de l´intervalle.

Une variante : Théorème des accroissements finis (TAF)
Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que : $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c)$.

Remarque 0 : On rappelle que le TAF est spécifique du but réel et ne s´étend pas aux fonctions

à valeurs dans un espace vectoriel normé. Considérer $F : x \mapsto e^{ix}$ de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie $F(0) = F(2\pi)$ avec, pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $F'(x) = ie^{ix} \neq 0$.

Remarque 1 : Si on suppose que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $a < b$ dans $\mathbb{R}$, il existe un *unique* $c \in]a, b[$ tel que $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c)$, alors F est strictement convexe ou strictement concave sur $\mathbb{R}$. Ce résultat proposé en exercice dans *Fonctions de la variable réelle* (chap1, Bourbaki), est exposé dans [3]. La preuve est identique à celle de la proposition 2 vue dans la première partie.

Remarque 2 : on ne peut omettre l´hypothèse de continuité sur le segment. Considérer la fonction définie sur $[0, 1]$ par $F(x) = \frac{1}{x}$ si $x \in]0, 1]$ et $F(0) = 0$.

Remarque 3 : Pour une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur l´intervalle I, la positivité de $f = F'$ sur I implique la croissance de F sur I (application immédiate du TAF). On adapte sans problème le résultat lorsque $f \leqslant 0$ ou $f = 0$. La réciproque est vraie car $\mathbb{R}^+$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

On insiste sur l´importance de l´hypothèse "I intervalle". Pour s´en convaincre, on pourra étudier la fonction $x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

Remarque 4 : On ne peut remplacer "dérivable" par "dérivable à droite" et F' par F'_d dans le TAF. Considérer $x \mapsto |\ x\ |$ sur $[-1, 1]$. En revanche pour l´étude des variations de F, on peut remplacer $F' \geqslant 0$ par $F'_d \geqslant 0$. L´argument n´est plus le TAF (caduque) mais l´inégalité des accroissements finis vectoriels IAF ou théorème de comparaison des dérivées (à droite) (cf [4]).

Exercice 1 : (Théorème de Rolle généralisé)
Soit F une fonction continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x)$. Alors il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $F'(c) = 0$.

On raisonne par l´absurde, le théorème de Darboux assure alors que F' garde un signe constant (par exemple strictement positif) sur $]a, +\infty[$.
L´application F y est donc strictement croissante, et puisque

$$\forall x > a + 1 \quad F(x) > F(a + 1) > F(a),$$

on a $\lim_{x\to+\infty} F(x) \geqslant F(a + 1) > F(a)$. Contradiction.

Exercice 2 : (cf [5])
Soit (F_n) une suite de fonctions *dérivables* de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

- il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que la suite $(F_n(x_0))$ converge
- la suite de fonctions (F'_n) converge uniformément vers une fonction g.

Alors (F_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction dérivable F qui vérifie $F' = g$.

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall p, q \geqslant N \quad |\ F_p(x_0) - F_q(x_0)\ | \leqslant \varepsilon$

et $\forall x \in [0,1] \quad | F'_p(x) - F_q(x) | \leqslant \varepsilon$. Dans les mêmes circonstances, par l´inégalité des accroissements finis :

$$| (F_p - F_q)(x) - (F_p - F_q)(x_0) | \leqslant \varepsilon \mid x - x_0 \mid \leqslant \varepsilon,$$

et à fortiori :

$$| (F_p - F_q)(x) | \leqslant \varepsilon + | (F_p - F_q)(x_0) | \leqslant 2\varepsilon.$$

On en déduit que la suite (F_n) est uniformément de Cauchy sur $[0,1]$, à but réel (complet), donc (F_n) converge uniformément vers une fonction notée F.

Soit $a \in [0,1]$. On veut montrer que F est dérivable en a. On va donc évaluer :
$\Delta(x,a) = | \frac{F(x)-F(a)}{x-a} - g(a) |$ pour $x \neq a$. L´idée est d´écrire : $\Delta(x,a) = | \frac{F(x)-F(a)}{x-a} - \frac{F_N(x)-F_N(a)}{x-a} |$ $+ | \frac{F_N(x)-F_N(a)}{x-a} - F'_N(a) | + | F'_N(a) - g(a) |$, avec N judicieusement choisi dans $\mathbb{N}^*$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\| F'_N - g \|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad ; \quad \forall p \geqslant N \quad \| F'_p - F'N \|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme plus haut (avec l´´inégalité des accroissements finis), pour $p \geqslant N$ et $x \in [0,1]$, on a :
$| (F_p - F_N)(x) - (F_p - F_N)(a) | \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, ce qui donne en faisant tendre à bon droit p vers $+\infty$:

$$| \frac{F(x) - F(a)}{x - a} - \frac{F_N(x) - F_N(a)}{x - a} | \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

De là : $\Delta(x,a) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + | \frac{F_N(x)-F_N(a)}{x-a} - F'_N(a) |$. On choisit alors $\delta > 0$ tel que pour tout x de $[0,1] \cap]a-\delta, a+\delta[$, le dernier terme est majoré par $\frac{\varepsilon}{3}$. On en déduit que F est dérivable en a avec $F'(a) = g(a)$.

La preuve ci-dessus est valable si les fonctions F_n sont à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel *complet* ; Les outils sont toujours *critère de Cauchy uniforme* et Inégalité des accroissements finis vectoriels.

b) Une utilisation "fine" du TAF   cf [1]

On donne un résultat classique de prolongement d´une fonction dérivée où les conditions d´application du TAF sont "juste" remplies :

Soit $F :]a,b] \to \mathbb{R}$ telle que :
- F est dérivable sur $]a,b]$
- $F' = f$ possède une limite finie l en a^+.

Alors F admet un (unique) prolongement $\tilde{F}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $[a,b]$ avec $\tilde{F}'(a) = l$.

Remarque : On retrouve le résultat selon lequel une fonction dérivée ne possède que des discontinuités de deuxième espèce.

preuve : Soit $c \in]a,b]$ tel que : $\forall s \in]a,c] \quad | f(s) | \leqslant | l | + 1 (= M)$. Pour $x < y$ dans $]a,c]$, F est dérivable sur $[x,y]$ et $\forall s \in [x,y] \quad | f(s) | \leqslant M$ donc par l´inégalité des accroissements finis : $| F(y) - F(x) | \leqslant M \mid y - x \mid$. Soit $\varepsilon > 0$. Si $| x - a | \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$ et $| y - a | \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$, on a : $| F(y) - F(x) | \leqslant \varepsilon$. Le critère de Cauchy est vérifié en a pour F (à valeurs dans $\mathbb{R}$ complet) donc F admet une limite finie

L en a. On pose : $\tilde{F}(a) = L$.

Reste à voir pourquoi : $\lim_{x\to a} \frac{\tilde{F}(x)-\tilde{F}(a)}{x-a} = l$. Pour $x \in]a,b]$, $\tilde{F}$ est continue sur $[a,x]$, dérivable sur $]a,x[$ donc il existe c_x dans $]a,x[$ tel que :
$\frac{\tilde{F}(x)-\tilde{F}(a)}{x-a} = f(c_x)$. Quand x tend vers a^+, c_x tend vers a^+ et $f(c_x)$ tend vers l. cqfd

Exercice : On considère l´équation différentielle (E) $x' = \cos t + \cos x$. Alors toute solution maximale de (E) est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

L´application $(t,x) \mapsto \cos t + \cos x$ étant C^1 sur $\mathbb{R}^2$, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, toute solution maximale est définie sur un intervalle ouvert ; Soit F une telle solution définie sur $]a,b[$. Si b est un réel, avec F' bornée (par 2) sur $]a,b[$, l´inégalité des accroissements finis assure que F est de Cauchy en b, donc admet une limite finie l en b. On prolonge F par continuité en b en posant : $\tilde{F}(t) = F(t)$ si $a < t < b$, $\tilde{F}(b) = l$. A présent, $\tilde{F}'$ possède une limite finie en b, qui vaut $\cos l + \cos b$ donc $\tilde{F}$ est dérivable en b avec $\tilde{F}'(b) = \cos(\tilde{F}(b)) + \cos b$. Finalement, $\tilde{F}$ est une solution définie sur $]a,b]$ qui prolonge strictement la solution maximale F. Contradiction ! On montre de même que a n´est pas un réel.

Exercice : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\phi : U \to \mathbb{R}$ une application C^1 sur U. Alors toute solution maximale bornée de $x' = \phi(t,x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit x la solution maximale passant par (t_0, x_0), de source $J =]a,b[$, bornée par M sur J. L´application ϕ est continue et donc bornée (par K) sur le compact $[t_0,b] \times [-M,M]$. Avec $\mid x' \mid \leqslant K$ sur $[t_0,b[$, x est de Cauchy en b et on conclut comme dans l´exercice précédent.

c) Un raffinement du TAF

Position du problème

• Le théorème des accroissements finis, variante du théorème de Rolle, repose essentiellement sur le fait qu´une fonction réelle continue sur un *segment* est bornée et atteint ses bornes.
• Soit à présent $a < b$ dans $\mathbb{R}$, F une fonction dérivable sur $[a,b]$ de dérivée $f = F'$. $f([a,b])$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ (selon Darboux), non nécessairement compact. Considérer la fonction "fortement plissée" F définie sur $[0,1]$ par $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$, $F(0) = 0$. F est dérivable sur $[0,1]$, avec $f(0) = 0$ et $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}) = -2\sqrt{2n\pi}$, ce qui prouve que f n´est pas bornée sur $[0,1]$.

Peut-on remplacer l´hypothèse "f continue sur $[a,b]$" du TAF par "f une fonction dérivée sur $[a,b]$" malgré les deux remarques antinomiques précédentes ?

Une parenthèse : "$x^\alpha \sin x^\beta$ for ever"

• Ce qui précède donne un exemple de fonction dérivée qui n´est pas Riemann-intégrable car non bornée.
On signale qu´une fonction dérivée $f = F'$ définie, Riemann-intégrable sur un segment $[a,b]$ et à

valeurs réelles vérifie $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. Ce résultat exposé dans [5] repose sur le théorème des accroissements finis et les sommes de Riemann.

• Si on modifie l´exemple ci-dessus et si on envisage $G : x \mapsto x + x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ sur $[0, 1]$, on montre que G est dérivable sur $[0, 1]$ avec $G'(0) = 1$,
$G'(x) = 1 + 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$. On a $G'(0) > 0$ et pourtant en considérant la suite de terme général $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$, on vérifie qu´il n´existe aucun voisinage de 0 sur lequel $g = G'$ est positive et G croissante.

Proposition 4
Soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $f = F'$ est dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Ce résultat est aussi un exercice dans Bourbaki, résolu dans les polycopiés de J.M. Exbrayat pour l´agrégation.

Remarque préliminaire :
Si f était continue en a, *toute* suite (x_n) de points de $]a, b[$ qui converge vers a vérifierait : $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$. Le seul statut de dérivée donne une information plus faible : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a + \frac{1}{n} < b$, par le TAF, $n[F(a + \frac{1}{n}) - F(a)] = f(\alpha_n)$ où : $a < \alpha_n < a + \frac{1}{n}$ donc il *existe* une suite (α_n) convergente vers a, qui vérifie : $\lim_{n\to+\infty} f(\alpha_n) = f(a)$.

Lemme :
soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a, b]$, avec $f = F'$ dérivable sur $]a, b[$.
Si $f' > 0$ sur $]a, b[$, alors $f(a) < f(b)$.

on choisit $(c, d) \in]a, b[^2$, (u_n), (v_n) suites de points de $]a, b[$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < c < d < v_n\,;\ (u_n) \to a\,;\ f(u_n) \to f(a)\,;\ (v_n) \to b\,;\ f(v_n) \to f(b).$$

Puisque f est strictement croissante sur $]a, b[$ (corollaire du TAF), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) < f(c) < f(d) < f(v_n)$$

et par passage à la limite : $f(a) \leqslant f(c) < f(d) \leqslant f(b)$.

Preuve de la proposition 3 : on choisit deux suites (u_n) et (v_n) de points de $]a, b[$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < v_n\ ;\ (u_n) \to a\ ;\ f(u_n) \to f(a)\ ;\ (v_n) \to b\ ;\ f(v_n) \to f(b).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, le quotient $\tau_n = \frac{f(v_n)-f(u_n)}{v_n-u_n}$ s´écrit avec le TAF : $\tau_n = f'(w_n)$ où w_n est un point de $]u_n, v_n[$, et (τ_n) tend vers $\tau = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, donc τ appartient à l´adhérence de $J = f'(]a, b[)$ qui est selon Darboux un intervalle de $\mathbb{R}$. Reste à voir que : $\tau \in J$. Par l´absurde, τ est une extrémité de l´intervalle J, hors de J. Par exemple : $\forall x \in]a, b[\quad \tau < f'(x)$. On envisage alors la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - \tau x\,;\ g = \left(F - \frac{\tau}{2}x^2\right)'$ est une fonction dérivée sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, de dérivée strictement positive sur $]a, b[$, donc $g(a) < g(b)$. Contradiction puisque $g(a) = g(b)$.

Troisième partie

Une fonction dérivée f telle que f^2 n´est pas une dérivée

Considérations immédiates

• L´ensemble $\mathcal{D}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont des dérivées a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
• Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, f^2 est aussi continue sur $\mathbb{R}$, et les fonctions $x \mapsto \int_0^x f$ et $x \mapsto \int_0^x f^2$ sont alors des primitives de f et f^2 sur $\mathbb{R}$.

Un exemple qui convient : cf [6]
Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(0) = 0$, $G(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$. G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée g est définie par $g(0) = 0$, $g(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$. g s´écrit $g = h - f$ où :
• h est la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = 2x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $h(0) = 0$.
• $f(0) = 0$, $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$.
Par différence, f est un élément de $\mathcal{D}$.
f^2 vérifie : $f^2(0) = 0$, $f^2(x) = \frac{1}{2}[1 + f(\frac{x}{2})]$ si $x \neq 0$. Si f^2 est aussi une fonction dérivée, l´application χ définie par :

$$\chi(0) = 1 \ , \ \chi(x) = 1 + f(\frac{x}{2}) - 2f^2(x) = 0$$

appartient à $\mathcal{D}$, ce qui est absurde car χ à valeurs dans $\{0, 1\}$ ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires.

Pour aller plus loin : cf [7]
On montre que les seules fonctions réelles φ définies sur un intervalle I telles que :

$$\forall f \in \mathcal{D} \quad f(\mathbb{R}) \subset I \Rightarrow \varphi \circ f \in \mathcal{D}$$

sont les fonctions affines.

Quatrième partie

Une fonction dérivée "fortement" discontinue

A l´aide de la fonction dérivable (non $\mathcal{C}^1$) $\varphi : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongée par 0 en 0, on peut construire une fonction dérivée sur $[0, 1]$, discontinue en tout point rationnel ; Soit $(r_n)_{n \geqslant 1}$ une numérotation des rationnels de $[0, 1]$. On envisage l´application $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi(x - r_n)$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, correctement définie (et continue) par convergence normale. Avec φ' bornée sur $[-1, 1]$, la série de fonction $\sum \frac{1}{n^2} \varphi'(x - r_n)$ converge uniformément sur $[0, 1]$. On évoque alors à bon droit le théorème de dérivation terme à terme en "version Δ^1", pour affirmer que F est dérivable sur $[0, 1]$ et

$$F'(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi'(x - r_n).$$

Pour a irrationnel dans $[0,1]$, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{n^2}\varphi'(x-r_n)$ sont continues en a, donc par convergence uniforme, F' est continue en a. Si a est un rationnel de $[0,1]$, a est un certain r_N. On écrit :

$$F'(x) \equiv \underbrace{\frac{1}{N^2}\varphi'(x-a)}_{\text{discontinue en } a} + \underbrace{\sum_{n\neq N} \frac{1}{n^2}\varphi'(x-r_n)}_{\text{continue en } a},$$

donc F' est discontinue en a. (cf [5])

Cinquième partie

Fonction dérivée et TVI

Question : Peut-on trouver une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et qui n´est pas une fonction dérivée ?

Réponse (d´après une brève de preuve de Daniel Saada) :
On regarde $\mathbb{R}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ et on désigne par B une base de $\mathbb{R}$.
a) B étant infinie, on admet qu´il existe $f : B \to B$ surjective et non injective.
b) On prolonge f linéairement à $\mathbb{R}$.
c) f est totalement discontinue sur $\mathbb{R}$. On raisonne par l´absurde en supposant f continue en un certain $a \in \mathbb{R}$. Pour $b \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, $f(a+h) - f(a) = f(b+h) - f(b) = f(h)$ donc la continuité de f en a implique la continuité de f en b et donc la continuité de f sur $\mathbb{R}$. A présent, pour $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 f(x+y)dy = \int_x^{x+1} f$ et $\int_0^1 f(x+y)dy = f(x) + \int_0^1 f$, ce qui assure que f est C^1 sur $\mathbb{R}$. On dérive alors partiellement par rapport à x dans l´égalité $f(x+y) \underbrace{\equiv}_{x,y\in\mathbb{R}} f(x) + f(y)$, puis on fait $x = 0$: $f'(y) = f'(0)$, ce qui donne : $f = f'(0)\,Id + f(0) = f'(0)\,Id$ avec $f'(0) \neq 0$ puisque f est surjective. Absurde car f n´est pas injective.
d) Le noyau de f n´est pas réduit à $\{0\}$ puisque f est linéaire non injective. Soit $a \in ker(f)$, $a \neq 0$. On a : $a\mathbb{Q} \subset ker(f)$ donc $ker(f)$ est dense dans $\mathbb{R}$.
e) L´image par f de tout intervalle non réduit à un point est $\mathbb{R}$. Il suffit de vérifier que $f([0,1]) = \mathbb{R}$. Soit $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ tel que $b = f(a)$, et $\alpha \in ker(f) \cap [a-1, a]$. Le réel $a - \alpha$ appartient à $[0,1]$ et $f(a-\alpha) = f(a) - f(\alpha) = b$. D´où le résultat.
f) On admet qu'une fonction dérivée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue sur un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ (cf [5] ou [8]). Ainsi f ne peut être une fonction dérivée car totalement discontinue, et pourtant f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Références

[0] Cours de J.M. Exbrayat pour l´agrégation
[1] *Analyse à une variable réelle*, A. Tissier et J.N. Mialet, Bréal
[2] *cours d'analyse*, A. Pommelet, Ellipses
[3] *Agrégation interne*, *Exercices d'oral*/3, P. Meunier, Puf

[4] *Cours de Mathématiques*, tome 2,
J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès, Dunod
[5] *Les maths en tête*, X. Gourdon, Ellipses
[6] RMS-111 vol 3-4, Vuibert
[7] RMS-112 vol 2, Vuibert
[8] *La planète* $\mathbb{R}$, H. Boualem et R. Brouzet, Dunod